# Varianta 83

**Subiectul I.**

**a)** $AB = \sqrt{6}$.

**b)** $x = 1$.

**c)** $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{3}{25}$.

**d)** Aria triunghiului este $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

**e)** $a = 3$.

**f)** $A(1, -3)$ şi $B(-1, 3)$.

**Subiectul II.**

**1.**

**a)** $\lg\dfrac{2}{1} + \lg\dfrac{3}{2} + \lg\dfrac{4}{3} + \ldots + \lg\dfrac{10}{9} = 1$.

**b)** Probabilitatea căutată este $p = \dfrac{1}{3}$

**c)** $x = 5$.

**d)** Câtul împărțirii este $q = X^2 - X + 1$, iar restul este $r = 1$.

**e)** $a_{10} = 512$.

**2.**

**a)** $f(0) = 0$.

**b)** $f'(x) = \cos x - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

**c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

**d)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

**e)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 1 - \dfrac{\pi^2}{8}$.

**Subiectul III.**

**a)** $f_n(0) = 1$.

**b)** $f_n(-1) = 0$.

**c)** Din enunț deducem că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $f_n = f_{n-1} + \dfrac{X(X+1)(X+2)\cdot\ldots\cdot(X+n-1)}{n!}$

Folosind relația anterioară, se demonstrează prin inducție că

$\forall\, n\in \mathbf{N}^*,\quad f_n=\dfrac{1}{n!}\,(X+1)(X+2)\cdot\ldots\cdot(X+n).$

**d)** Evident, folosind punctul **c)**.

**e)** Deoarece $I_3\cdot A=A\cdot I_3=A$, obținem:

$$(I_3-x\cdot A)\left(I_3+x\cdot A+x^2\cdot A^2+x^3\cdot A^3\right)=I_3-x^4\cdot A^4\overset{ip}{=}I_3,\quad \forall\, x\in \mathbf{C}.$$

**f)** Din **e)** obținem că $\det(I_3-x\cdot A)\neq 0$, $\forall\, x\in \mathbf{C}$.

Deducem că că funcția $g$ este constantă, deci $\forall\, x\in \mathbf{C}$, $g(x)=g(0)=\det(I_3)=1$.

**g)** Avem $f_3=(1+X)\left(1+\dfrac{1}{2}X\right)\left(1+\dfrac{1}{3}X\right)$ şi

$$f_3(A)=(I_3+A)\left(I_3+\frac{1}{2}A\right)\left(I_3+\frac{1}{3}A\right)=g(-1)\cdot g\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot g\left(-\frac{1}{3}\right)\overset{f)}{=}1.$$

**Subiectul IV.**

**a)** $f(1)=1$.

**b)** $f'(x)=\dfrac{-\alpha}{x^{\alpha+1}},\quad x\geq 1$.

**c)** $I_n(\alpha)=\left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^n=\dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\left(n^{1-\alpha}-1\right)$, pentru $\alpha\neq 1$.

Dacă $\alpha\in(0,1)$, atunci $n^{1-\alpha}\to\infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(\alpha)=\infty$.

Dacă $\alpha=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(1)=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)=\infty$.

Dacă $\alpha>1$, atunci $n^{1-\alpha}\to 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

**d)** Pentru $n\in \mathbf{N}$, $n\geq 2$, din **b)** deducem că funcția $f$ este strict descrescătoare pe $[n-1,n]$, deci $\forall\, x\in[n-1,n]$, avem $f(n)\leq f(x)\leq f(n-1)$.

Integrând ultima relație pe intervalul $[n-1,n]$ obținem concluzia.

**e)** Înlocuindu-l pe $n$ pe rând cu fiecare dintre numerele $2, 3, \ldots, n$ în inegalitatea din punctul **d)** şi adunând relațiile, se obține afirmația din enunț.

**f)** Şirul $\left(x_n(\alpha)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este, evident, strict crescător, deci are limită în $\overline{\mathbf{R}}$.

Dacă $\alpha\in(0,1]$, folosind **e)** obținem: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\alpha)=\infty$.

Dacă $\alpha>1$, folosind **e)** obținem că există $M>0$ astfel încât $x_n(\alpha)\leq I_n(\alpha)+1\leq M$, deci şirul $\left(x_n(\alpha)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este este convergent.

**g)** $$\lim_{n\to\infty}\left(e^{x_{n+1}(1)}-e^{x_n(1)}\right)=\lim_{n\to\infty} e^{x_n(1)}\left(e^{x_{n+1}(1)-x_n(1)}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{c_n+\ln n}}{n+1}\,\frac{\left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right)}{\dfrac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot e^{c_n}}{n+1}=e^c.$$